ERRORES FRECUENTES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN BACHILLERATO

Ángel Cuadal Agoiz
UNED Tudela

1. INTRODUCCIÓN

El error forma parte habitualmente de las producciones del alumnado y constituye un elemento permanente en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. «Los errores son datos objetivos que encontramos permanentemente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas» (Rico, 1998, p. 76).

El estudio de los errores en el proceso de aprendizaje ha sido una cuestión de permanente interés y es actualmente un importante núcleo de investigación en Didáctica de las Matemáticas. Hay dos aspectos considerados prioritarios en la investigación en torno a los errores: las causas y las tipologías de estos errores y su tratamiento curricular. El error es considerado parte inseparable del proceso de aprendizaje. Los investigadores en Didáctica de las Matemáticas sugieren diagnosticar y tratar los errores de los alumnos, discutir con ellos sus concepciones erróneas, y presentarles luego situaciones matemáticas que les permitan reajustar sus ideas.

Además, es notable observar que casi todas las recomendaciones metodológicas acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemática coinciden en la necesidad de señalar que se identifiquen los errores del alumnado en el proceso de aprendizaje, determinando sus causas y organizando la enseñanza teniendo en cuenta esa información; remarcando que el docente tiene que ser sensible a las ideas previas de los estudiantes. Se constata que errores consolidados por el alumnado durante el bachillerato persisten y se afianzan en los primeros cursos universitarios, son errores que se producen en destrezas matemáticas adquiridas antes del ingreso en la Universidad.

2. OBJETIVOS

Vemos la importancia al estudio de los errores en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, puesto que el error es un elemento inherente a este proceso y un indicador del grado de comprensión del alumnado.

El objetivo de esta investigación es, por tanto, determinar y analizar los errores más frecuentes, indagar sobre las causas que los provocan e interpretarlos de acuerdo con las posibles concepciones subyacentes, para orientar el proceso de enseñanza.

Es decir, ¿qué errores detecta frecuentemente el profesorado de matemáticas de bachillerato en el aprendizaje del alumnado?, ¿cuáles son las causas y motivos posibles que producen en el alumnado estos errores? Formulamos los siguientes objetivos:

1. Delimitar el concepto de «error».
2. Detectar los errores más comunes y relevantes en el proceso de aprendizaje de las matemáticas en bachillerato.
3. Clasificar los errores.
4. Identificar las causas y la naturaleza de estos errores.

3. MARCO REFERENCIAL

Las investigaciones en Educación Matemática consideran los errores como elemento inherente al proceso de aprendizaje de las matemáticas.

Cuando un alumno proporciona una respuesta incorrecta a una cuestión matemática que se le plantea, se puede decir que su respuesta es errónea, y la solución proporcionada es un error en relación con la cuestión propuesta (Rico,1995)

Para Brousseau, Davis y Werner (1986), el error puede aparecer de cuatro formas diferentes:

- Como resultado de grandes concepciones inadecuadas acerca de aspectos fundamentales de las matemáticas.
- Producto de la aplicación correcta y crédula de un procedimiento imperfecto sistematizado, que se puede identificar con facilidad por el profesor.
- Consecuencia de la utilización por el alumno de procedimientos imperfectos, a partir concepciones inadecuadas que no son reconocidas por el profesor.
- Por el uso de métodos inventados por el alumno, métodos no formales y originales, pero inadecuados.

Socas (1997), considera el error como la presencia en el alumnado de un esquema cognitivo inadecuado y no sólo la consecuencia de una falta específica de conocimiento o una distracción. Además, establece tres ejes que permiten analizar el origen del error:

- Obstáculos. Conocimientos adquiridos que demuestran su efectividad en ciertos contextos pero no son válidos en otros.
- Ausencia de sentido. Se originan en los diferentes estadios de desarrollo que se dan en los sistemas de representación
- Actitudes afectivas y emocionales. Estos errores tienen distinta naturaleza: faltas de concentración (excesiva confianza), bloqueos, olvidos...

Una clasificación empírica de los errores cometidos por alumnos de secundaria en matemáticas, es la de Movshovitz-Hadar, Zaslavksy e Inbar (citados en Rico,1998). De acuerdo con la metodología propuesta determinan seis categorías descriptivas para clasificar los errores:

1. Datos mal utilizados
2. Interpretación incorrecta del lenguaje.
3. Inferencias no válidas lógicamente.
4. *Teoremas o definiciones deformados*.
5. *Falta de verificación en la solución*.
6. *Errores técnicos*.

Radatz (1979) propone una taxonomía para clasificar los errores a partir del procesamiento de la información, estableciendo cinco categorías generales para este análisis:

1. Errores debido a dificultades de lenguaje.
2. Errores debido a dificultades para obtener información espacial.
3. Errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.
4. Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento. Establece cinco subtipos:
    - Errores por perseveración.
    - Errores de asociación.
    - Errores de interferencia.
    - Errores de asimilación.
    - Errores de transferencia.
5. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

Podemos considerar tres etapas en la investigación de los errores en el aprendizaje de las matemáticas. La primera etapa está caracterizada por el recuento de estos errores, su clasificación y su asociación con causas relativas al contenido matemático.

En una segunda etapa, a partir, aproximadamente, de la década de los ochenta, se reconoce el error como elemento normal del proceso de enseñanza y aprendizaje, intentando comprender el proceso de construcción de los objetos matemáticos que el alumno realiza: se constata que los errores que cometen los alumnos muestran, en algunos casos, un patrón común. En esta etapa se reconoce que los errores son también producto de otras variables del proceso educativo: profesorado, currículo, contexto,…Por último, en la tercera etapa se trabaja no sólo en analizar y clasificar los errores, sino en conocer su origen, lo que nos permita implementar procedimientos que ayuden a los alumnos a corregir esto errores. Según Rico (1998) hay cuatro líneas principales de investigación relativas a errores en el aprendizaje de las matemáticas:

1. Estudios relativos al *análisis de errores*, a las causas que los producen o elementos que los explican, y taxonomías y clasificaciones de los errores detectados. Suelen proceder o tener relación con alguna teoría psicológica o psicopedagógica que proporciona un marco explicativo. También incluye las aproximaciones teóricas.
2. Estudios dedicados al *tratamiento curricular de los errores* del aprendizaje en matemáticas. Caben aquí los trabajos dedicados a la organización didáctica de la enseñanza de las matemáticas, de forma que los errores juegan un papel fundamental.
3. Estudios cuyo objeto es determinar qué necesita conocer el profesorado con relación a los errores que comete el alumnado. Se trata de estudios relativos a la *formación del profesorado*.
4. Estudios de *carácter técnico* que propugnan y aplican una clase concreta de análisis sobre errores. Utilizan metodologías estadísticas y psicométricas.

4. METODOLOGÍA

Una clasificación sucinta de los tipos de investigación en Educación Matemática puede ser la siguiente:

- *Investigación descriptiva*. Su objetivo es, generalmente, hacer una descripción exacta de la situación real del problema que se quiere investigar para, a partir de los datos obtenidos, generar hipótesis, sugerir vías de solución, plantear problemas o tomar decisiones para investigaciones posteriores.
- *Investigación experimental*. En síntesis, en este tipo de investigación se manipulan algunas variables (variables independientes) y se observan sus efectos sobre otras (variables dependientes). La experimentación conlleva la comparación de diferentes grupos o tratamientos.

- *Investigación cualitativa o interpretativa.* Utiliza técnicas de recogida datos y de contrastación elaboradas "ad hoc", ajustadas al objeto de estudio, diferentes de las técnicas tradicionales experimentales; su finalidad es intentar abarcar toda la complejidad del hecho educativo.
- *Investigación histórica.* Responde a las características de la historiografía general, y utiliza el método histórico.
- *Investigación-acción.* Pretende resolver problemas reales y concretos, sin pretensiones teóricas de generalización. Su objetivo es mejorar la práctica educativa real en una situación determinada.

Podemos situar el presente proyecto como una investigación descriptiva cualitativa

Se ha realizado la revisión y análisis de una muestra de 350 exámenes y pruebas objetivas realizadas por alumnado de 1º y 2º de bachillerato, seleccionando y recopilando los errores más frecuentes y relevantes.

Se ilustran mediante 118 fotografías que se incluyen en el Anexo.

Posteriormente se procede a la clasificación y categorización de estos errores mediante un sistema de clasificación propio.

Teniendo en cuenta las cuatro líneas de investigación relativas a errores en el aprendizaje de las matemáticas, antes referidas, el presente proyecto se inscribe en la primera: estudios relativos al análisis de errores, a las causas que los producen o elementos que los explican, y taxonomías y clasificaciones de los errores detectados.

5. RESULTADOS. ERRORES FRECUENTES

5.1. Recopilación y selección

Se han detectado y recopilado 70 errores, de los que presentamos una selección. Se muestra en la columna de la izquierda la producción del alumnado y en la columna de la derecha el resultado correcto. Además, se indican los números de las fotografías que ilustran el error.

Nº	Realizado por el alumnado: error	Correcto	Foto
1	$-x^3+2x^2+x-2=(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)$	$-x^3+2x^2+x-2=-(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)$	1
2	$\sqrt{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[5]{5}$	$\sqrt{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[6]{5}$	2
3	$\frac{7-6\sqrt{2}+\sqrt{10}}{3}=7-2\sqrt{2}+\sqrt{10}$	$\frac{7-6\sqrt{2}+\sqrt{10}}{3}$	3
4	$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 3 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & -3 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 3 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$	4
5	$-x-1=2y-6 \Rightarrow -x+2y+5=0$	$-x-1=2y-6 \Rightarrow -x-2y+5=0$	5
6	$x^4=5x^2-\frac{20}{5} \Rightarrow x^4=\frac{25x^2}{5}-\frac{20}{5} \Rightarrow$ $x^4=25x^2-20$	$x^4=5x^2-\frac{20}{5} \Rightarrow \frac{5x^4}{5}=\frac{25x^2}{5}-\frac{20}{5} \Rightarrow$ $5x^4=25x^2-20$	6
7	$\left[1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2\right]^3=\left[1+\left(\frac{3^2}{5^2}\right)\right]^3$	$\left[1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2\right]^3=\left[1-\left(\frac{3^2}{5^2}\right)\right]^3$	7
8	$x^2-2x+1=(x-1)\cdot(x+1)$ $x^2-2x+1=0\ ;\ x=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=\begin{cases}1\\-1\end{cases}$	$x^2-2x+1=(x-1)^2$ $x^2-2x+1=0\ ;\ x=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=1$	8
9	$x^2=16+y^2 \Rightarrow x=\sqrt{16+y^2} \Rightarrow x=4+y$	$x^2=16+y^2 \Rightarrow x=\sqrt{16+y^2}$	9
10	$(4-x)^2=16+x^2$	$(4-x)^2=16+x^2-8x$	10
11	$d(r,s)=\frac{\left[\vec{u}_r,\vec{u}_s,\overrightarrow{PQ}\right]}{\lvert\vec{u}_r\rvert\cdot\lvert\vec{u}_s\rvert}$	$d(r,s)=\frac{\left[\vec{u}_r,\vec{u}_s,\overrightarrow{PQ}\right]}{\lvert\vec{u}_r\times\vec{u}_s\rvert}$	11
12	$6+2\sqrt{3}=8\sqrt{3}$	$6+2\sqrt{3}$	12
13	$49^x-7^x=(49-7)^x=42^x$	$(7^2)^x-7^x=7^{2x}-7^x$	13
14	$z(z^3+1)=0 \Rightarrow z^3+1=0$	$z(z^3+1)=0 \Rightarrow \begin{cases}z^3+1=0\\ z=0\end{cases}$	14
15	$x^2-5x+6=0$ Raíces: $x_1=-2;\ x_2=-3$ $x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\begin{cases}3\\2\end{cases}$	$x^2-5x+6=0$ Raíces: $x_1=2;\ x_2=3$ $x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\begin{cases}3\\2\end{cases}$	15
16	$\frac{-2\sqrt{15}-\sqrt{5}}{12}=\frac{-\sqrt{15}-\sqrt{5}}{6}$	$\frac{-2\sqrt{15}-\sqrt{5}}{12}$	16

5. 2. Descripción

1. Omisión del coeficiente principal en una factorización de polinomios.
2. Raíz de raíz (sumar en vez de multiplicar)

3. Supresión del denominador en el resultado de una suma de fracciones.
4. Triangularización de una matriz por el método de Gauss.
5. Cambio de signo incorrecto en una trasposición de términos.
6. Supresión de denominadores en una ecuación.
7. Potencia de exponente dos y base negativa, precedida de un signo menos: transforma este en positivo.
8. Ecuación de segundo grado con raíz doble.
9. Raíz de una suma como suma de raíces.
10. Aplicación incorrecta de una identidad notable.
11. Fórmula incorrecta: distancia entre dos rectas.
12. Sumar antes que multiplicar (jerarquía de las operaciones)
13. Resta de cuadrados como cuadrado de una resta (en un contexto de ecuaciones exponenciales)
14. Ecuación polinómica con solución 0: omisión de la solución 0.
15. Ecuación de segundo grado: considerar las raíces opuestas.
16. Simplificación de una fracción con varios sumando en el numerador: se simplifica un factor en sólo uno de estos sumandos (y en el denominador)

5. 3. Clasificación. Análisis

Agrupamos los errores de naturaleza similar, atendiendo no al contenido de la materia, sino, fundamentalmente, al tipo de operación o destreza implicada que supone la fuente del error. Este es el sistema de clasificación que proponemos:

1. Proposiciones y reglas modificadas.
2. Fórmulas incorrectas
3. Transferencia inadecuada de operaciones o de sus propiedades.
4. Errores de asociación
5. Interpretaciones erróneas.
6. Problemas en la simplificación.
7. Procedimientos incompletos
8. Errores técnicos

Ahora, clasificamos los errores detectados de acuerdo con esta taxonomía, analizando, en algunos casos, la naturaleza y las causas del error.

1. <u>Proposiciones y reglas modificadas</u>.

En esta categoría incluimos errores como (2). Para calcular la raíz de una raíz, se expresa el índice como suma de índices en lugar de como producto.

También contiene los casos en los que se vulnera la jerarquía de las operaciones (12).

2. Fórmulas incorrectas.
Podríamos considerar un subcriterio del anterior, pero aquí incluimos la mera plasmación (incorrecta) de una fórmula. Por ejemplo (11)

La categorización de los errores en identidades notables puede plantearnos dudas. Podemos considerar que se trata del uso (inadecuado) de una fórmula o bien de un proceso de transferencia o generalización incorrecto. Incluso puede darse el caso que un mismo resultado obedezca, en dos alumnos distintos, a dos causas distintas. En cualquier caso, las vamos a incluir en este apartado. Por ejemplo (10)

3. Transferencia inadecuada de operaciones o de sus propiedades.
En (9) la raíz de una suma se convierte en una suma de raíces. Hay una transferencia incorrecta de la propiedad para la raíz de un producto a la raíz de una suma. En (13) transfiere la propiedad del producto a la resta.

4. Errores de asociación.
En (3) se suprime el denominador en el resultado de una suma de fracciones. Entendemos que la fuente del error está en la identificación que hace el alumno con una ecuación. Y en (7) se generaliza la acción del exponente al signo menos que precede al paréntesis

5. Interpretaciones erróneas.
Considera las raíces opuestas a las correctas en una ecuación de segundo grado (15). La causa radica en la aplicación a la factorización del polinomio de segundo grado: para la raíz $a, x \square a$. En (8) se produce una interpretación errónea de la raíz doble de una ecuación de segundo grado.

6. Problemas en la simplificación.
Por ejemplo, la simplificación de una fracción con varios sumandos en el numerador: se simplifica un factor en sólo uno de estos sumandos (16)

7. Procedimientos incompletos
Incluimos aquí diversas acciones y de distinta naturaleza, pero que conllevan la realización de alguna operación o la aplicación de algún procedimiento de forma incompleta. Así, en (14) sólo considera una

de las posibles soluciones de la ecuación. En (1) se omite el coeficiente principal al factorizar un polinomio.

8. Errores técnicos.
Incluimos en esta categoría los errores de cálculo, errores en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos básicos. Como en (4), (5) y (6)

En la siguiente tabla se muestran los errores de mayor prevalencia, de entre los seleccionados, junto a la categoría a la que pertenecen.

Error (n.º)	**Número de apariciones**	**Categoría**
1	8	Procedimientos incompletos.
3	9	Errores de asociación
8	6	Interpretaciones erróneas
16	4	Problemas en la simplificación

Por categorías, obtenemos los siguientes resultados:

Criterio de clasificación	**N.º de errores**
Proposiciones o reglas modificadas	14
Fórmulas incorrectas	8
Transferencia inadecuada de operaciones o de sus propiedades	13
Errores de asociación	9
Interpretaciones erróneas	5
Problemas en la simplificación	3
Procedimientos incompletos	7
Errores técnicos	11

6. CONCLUSIONES

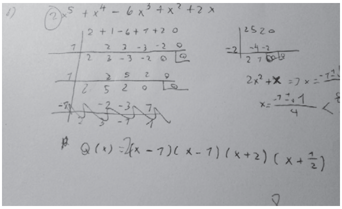
Como producto de este trabajo, hemos propuesto un sistema de clasificación para categorizar los errores cometidos por el alumnado al realizar pruebas objetivas y exámenes correspondientes a los contenidos de matemáticas de los cursos de bachillerato. Creemos que es una herramienta útil de análisis, pero que requerirá de un proceso de depuración y de validación. En esta línea, sería interesante incrementar la muestra de pruebas analizadas y ampliar también las áreas de contenido implicadas.

Somos conscientes de que la taxonomía realizada es de índole empírica y por tanto habrá que tener en cuenta las limitaciones del modelo; sin embargo puede ser un buen instrumento para el diagnóstico de errores y para su posterior tratamiento y superación. La incidencia de los errores no depende tanto del tipo de contenido como de la naturaleza de los procesos implicados en la tarea. Así podemos constatar, por ejemplo, una transferencia incorrecta de la propiedad de una operación, tanto en un producto de matrices como en la raíz de una suma.La mayor proporción de errores corresponde a las categorías *Proposiciones o reglas modificadas* y *Transferencia inadecuada de operaciones o de sus propiedades* en detrimento de otras

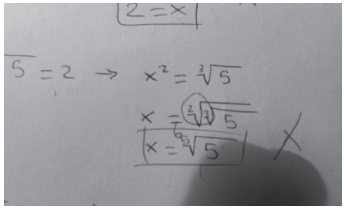
Creemos que el objetivo de las investigaciones sobre errores debe ser profundizar en la naturaleza de los procesos que están en el origen de estos errores, para poder explicar este origen y actuar en consecuencia. Hay que entender el error como fuente de información que nos permita en una fase posterior elaborar estrategias y procedimientos didácticos que permitan la corrección de los errores detectados.

Convenimos, por último, que los errores en matemáticas son consecuencia de un proceso complejo de enseñanza y aprendizaje donde intervienen muchas variables: profesor, alumno, currículum, contexto socio-cultural... Por tanto, en los estudios sobre los errores y su tratamiento, habrá que considerar también el contexto concreto.

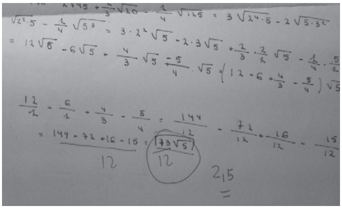
ANEXO



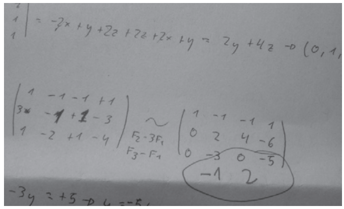
1



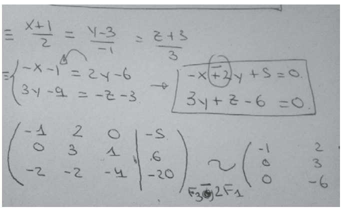
2



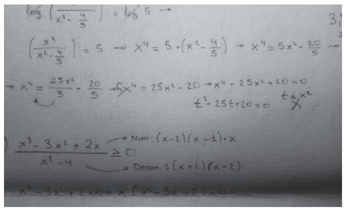
3



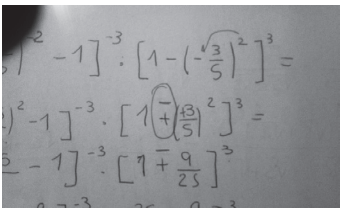
4



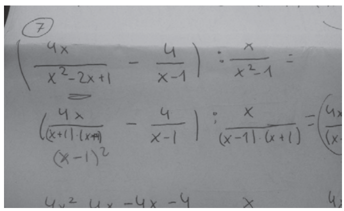
5



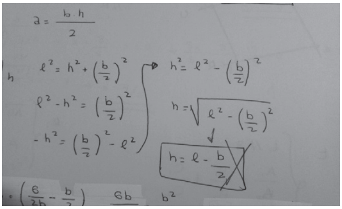
6



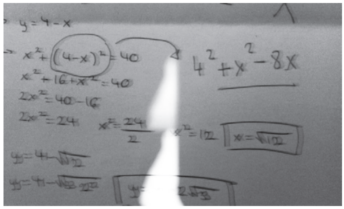
7



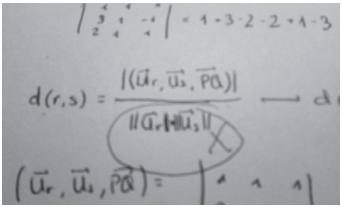
8



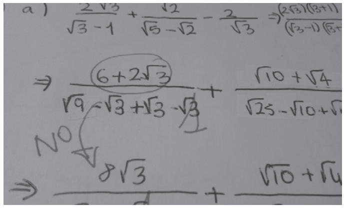
9



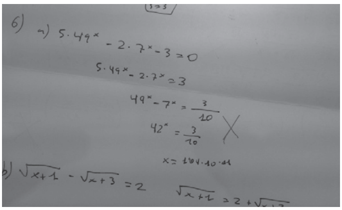
10



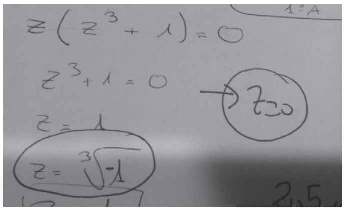
11



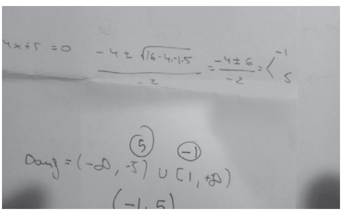
12



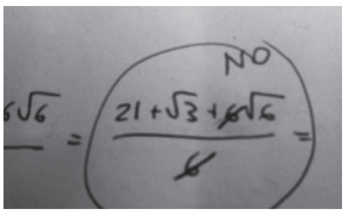
13



14



15



16

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brousseau, G., Davis, R., Werner, T. (1986). Observing Students at work, en Chistiansen B., Howson G., Otte M. (Ed.): *Perspectives on Mathematics Education*. Dordrecht: Reidel Publishing Co

Davis, R. (1984). *Learning Mathematics. The Cognitive Science Approach to Mathematics Education*. Australia: Croom Helm.

Esteley, C. y Villarreal, M. (1996): "Análisis y categorización de errores en Matemática". *Revista de Educación Matemática*, 1 (11). Universidad Nacional de Córdoba

Mulhern, G. (1989). Between the ears: Making inferences about internal processes. En Greer, B. & Mulhern, G. (Eds.). New Directions in Mathem. Educ. Routledge. Londres

Radatz, H., (1979). Error analysis in mathematics education, Journal for Research in Mathematics Education, 10, 3, pp. 163-172

Rico, L. (1995). *Errores en el aprendizaje de las Matemáticas*. En Kilpatrick, J.; Rico, L. y Gómez, P. Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica. Méjico.

Rico, L. (1998). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática: errores y dificultades de los estudiantes, resolución de problemas, evaluación e historia* (pp. 69-108). Bogotá, Colombia: Una Empresa Docente.

Socas, M. (1997): "Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria", cap. 5., pp. 125-154, en RICO, L., y otros: La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Ed. Horsori, Barcelona.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y M. P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52). Tenerife, España: SEIEM.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *77*, 5-34.